

Испит из Математике , Хемија, 29.1.2014. ГРУПА 1

- 1.(8 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n^3}$.
- 2.(8 поена) Одредити интервале монотоности и екстремне вредности функције $y = \ln \frac{1}{x^2-2x-3}$.
- 3.(8 поена) Израчунати интеграл $\int e^{2\sqrt{x+2014}} dx$
- 4.(8 поена) Решити диференцијалну једначину $2y'' + y' - y = e^{\frac{x}{2}}$.
- 5.(8 поена) Случајна променљива X има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ a & \frac{a}{2} & \frac{1}{2} & \frac{a}{2} & a \end{pmatrix}$$

- (а) Одредити непознату a .
- (б) Одредити $E(X^2 + 5)$
- 6.(10 поена) Дефиниција асимптоте реалне функције реалне променљиве. Формуле за израчунавање асимптота са доказом.
- 7.(10 поена) Прецизно навести и доказати формулу потпуне вероватноће и Бајесову формулу.

Испит из Математике , Хемија, 29.1.2014. ГРУПА 2

- 1.(8 поена) Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^2} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}$.
- 2.(8 поена) Одредити интервале монотоности и екстремне вредности функције $y = \ln \frac{1}{x^2-x-2}$.
- 3.(8 поена) Израчунати интеграл $\int e^{3\sqrt{2014-x}} dx$
- 4.(8 поена) Решити диференцијалну једначину $3y'' + 2y' - y = e^{\frac{x}{3}}$.
- 5.(8 поена) Случајна променљива X има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ a & \frac{a}{2} & \frac{2}{3} & \frac{a}{2} & a \end{pmatrix}$$

- (а) Одредити непознату a .
- (б) Одредити $E(X^2 + 4)$
- 6.(10 поена) Дефиниција асимптоте реалне функције реалне променљиве. Формуле за израчунавање асимптота са доказом.
- 7.(10 поена) Прецизно навести и доказати формулу потпуне вероватноће и Бајесову формулу.

Решење:

1. група 1

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^n}} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n^2} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{4} \left(\frac{n^2-1}{n^2-3}\right)^{n^2} &= \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-3+2}{n^2-3}\right)^{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2-3}\right)^{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{n^2} = \\ \frac{1}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2-3}{2}}\right)^{\frac{n^2-3}{2} \cdot \frac{2n^2}{n^2-3}} &= \frac{1}{4} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-3}} = \frac{e^2}{4} > 1 \text{ па према Кошијевом критеријуму полазни ред} \\ \text{дивергира. (У решавању смо користили познати лимес } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1)\end{aligned}$$

1. група 2

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{8^n}{n^2} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{8^n}{n^2}} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt[n]{n^2}} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{(\sqrt[n]{n})^2} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2} &= 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2-3}{n^2+2}\right)^{n^2} = 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n^2+2}\right)^{n^2} = 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n^2+2}{3}}\right)^{n^2} = \\ 8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\frac{n^2+2}{3}}\right)^{\frac{n^2+2}{3} \cdot \frac{3n^2}{n^2+2}} &= 8 \cdot e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2+2}} = 8 \cdot e^{-3} = \frac{8}{e^3} < 1 \text{ па према Кошијевом критеријуму} \\ \text{полазни ред конвергира. (У решавању смо користили познати лимес } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1)\end{aligned}$$

2. група 1

$$y = \ln \frac{1}{x^2-2x-3}$$

Домен функције је $D_f = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$. Први извод је $y' = -2 \frac{x-1}{x^2-2x-3}$. Функција расте за $x \in (-\infty, -1)$, а опада за $x \in (3, \infty)$. Једина нула првог извода $x = 1$ не припада домену функције, па функција нема екстрема.

2. група 2

$$y = \ln \frac{1}{x^2-x-2}$$

Домен функције је $D_f = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Први извод је $y' = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$. Функција расте за $x \in (-\infty, -1)$, а опада за $x \in (2, \infty)$. Једина нула првог извода $x = 1/2$ не припада домену функције, па функција нема екстрема.

3. група 1

$$\begin{aligned}\int e^{2\sqrt{x+2014}} dx &= \{ \text{смена } x+2014=t^2, dx=2t \cdot dt \} = \int 2 \cdot e^{2t} t dt = 2 \cdot \int e^{2t} t dt \stackrel{P.I.}{=} \\ \{U=t, dV=e^{2t} \cdot dt, dU=dt, V=\frac{1}{2}e^{2t}\} &= 2\left(\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2} \int e^{2t} dt\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2t}\right) + C = \\ te^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + C &= \sqrt{x+2014} \cdot e^{2\sqrt{x+2014}} - \frac{1}{2}e^{2\sqrt{x+2014}} + C\end{aligned}$$

3. група 2

$$\begin{aligned}\int e^{3\sqrt{2014-x}} dx &= \{ \text{смена } 2014-x=t^2, dx=-2t \cdot dt \} = -\int 2 \cdot e^{3t} t dt = -2 \cdot \int e^{3t} t dt \stackrel{P.I.}{=} \\ \{U=t, dV=e^{3t} \cdot dt, dU=dt, V=\frac{1}{3}e^{3t}\} &= -2\left(\frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{3} \int e^{3t} dt\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}te^{3t} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3t}\right) + C = \\ -\frac{2}{3}te^{3t} + \frac{2}{9}e^{3t} + C &= -\frac{2}{3}\sqrt{2014-x} \cdot e^{3\sqrt{2014-x}} + \frac{2}{9}e^{3\sqrt{2014-x}} + C\end{aligned}$$

4. група 1

$$2y'' + y' - y = e^{\frac{x}{2}}.$$

$$y = y_h + y_p.$$

Карактеристична једначина $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ има решења $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1/2$, па је $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2}$.

Десна страна једначине је $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$, зато партикуларно решење тражимо у облику $y_p(x) = a x e^{x/2}$ ($1/2$ је једнострука нула карактеристичне једначине, тј. решење облика $a e^{x/2}$ је већ садржано у хомогеном, па га морамо помножити са x).

Даље је $y_p'(x) = a e^{x/2} (1 + x/2)$, $y_p''(x) = \frac{a}{2} e^{x/2} (2 + x/2)$, па заменом партикуларног решења у полазну једначину добијамо да је $a = 1/3$, тј. $y_p(x) = x e^{x/2} / 3$, односно

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/2} + \frac{x}{3} e^{x/2}.$$

4. група 2

$$3y'' + 2y' - y = e^{-x}$$

$$y = y_h + y_p.$$

Карактеристична једначина $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ има решења $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 1/3$, па је $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/3}$.

Десна страна једначине је $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, зато партикуларно решење тражимо у облику $y_p(x) = a x e^{\frac{x}{3}}$ ($1/3$ је једнострука нула карактеристичне једначине, тј. решење облика $a e^{\frac{x}{3}}$ је већ садржано у хомогеном, па га морамо помножити са x).

Даље је $y_p'(x) = a e^{\frac{x}{3}} (1 + x/3)$, $y_p''(x) = \frac{a}{3} e^{\frac{x}{3}} (2 + x/3)$, па заменом партикуларног решења у полазну једначину добијамо да је $a = 1/4$, тј. $y_p(x) = x e^{x/3}/4$, односно

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x/3} + \frac{x}{4} e^{x/3}.$$

5. група 1

$$a + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + a = 1 \text{ па је } a = \frac{1}{6}.$$

Случајна променљива $X^2 + 5$ има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2 + 5) = \frac{13}{2}.$$

5. група 2

$$a + \frac{a}{2} + \frac{2}{3} + \frac{a}{2} + a = 1 \text{ па је } a = \frac{1}{9}.$$

Случајна променљива $X^2 + 4$ има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} 4 & 8 & 20 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2 + 4) = 8.$$